

Геометрические характеристики плоских сечений (РПР № 1)

Для заданной плоской фигуры, состоящей из двух прокатных элементов, в число которых может входить двутавр, швеллер и равнобокий уголок, требуется определить положение главных центральных осей z_{cl} , y_{cl} и соответствующих моментов инерции J_{max} , J_{min} .

Очень важно, уметь пользоваться справочными формулами необходимых для расчета геометрических характеристик и таблицами сортамента (ГОСТа) прокатных профилей. Это обязательное требование является основой при выполнении расчетно-проектировочных работ.

1 Варианты поперечных сечений

Номера прокатных профилей указаны в таблице 1, а их схемы даны на рисунках 1 (при оформлении расчетно-графической работы необходимо записывать номера прокатных профилей полностью).

Таблица 1 – Исходные данные для решения задачи № 1

№ строки	Схема по рисунку 1	Двутавр	Швеллер	Уголок -1	Уголок -2
1	1	14	16	100×100×7	220×220×14
2	2	12	14	80×80×6	200×200×12
3	3	16	18	75×75×8	250×250×20
4	4	18	12	90×90×6	220×220×16
5	5	10	14	80×80×6	180×180×11
6	6	20	18	70×70×5	250×250×16
7	7	14	12	100×100×8	200×200×14
8	8	12	10	90×90×8	180×180×12
9	9	18	20	63×63×6	250×250×18
0	0	16	16	110×110×7	200×200×13
	б	а	а	б	б

При решении задачи общая компоновка прокатных элементов в рассматриваемом сечении должна точно соответствовать конкретной схеме рисунков 1 и своему варианту задания.

2 Алгоритм и методика расчета

- 1) Определение площадей F_1 и F_2 каждой фигуры по таблицам сортамента.
- 2) Введение произвольных (случайных) осей координат z_{cl} , y_{cl} .

3) Определение координат z_1, y_1, z_2, y_2 центров тяжести C_1 и C_2 обоих прокатных профилей в системе отсчета $z_{cl} O_{cl} y_{cl}$.

4) Вычисление статических моментов $S_{z_{cl}}, S_{y_{cl}}$ и координат z_c, y_c центра тяжести C всего сечения с проведением через точку C базовых центральных осей z и y :

$$S_{z_{cl}} = F_1 y_1 + F_2 y_2, \quad S_{y_{cl}} = F_1 z_1 + F_2 z_2; \quad (1)$$

$$y_c = \frac{S_{z_{cl}}}{F_1 + F_2}, \quad z_c = \frac{S_{y_{cl}}}{F_1 + F_2}. \quad (2)$$

5) Определение координат центра C в собственных системах отсчета $z_1 C_1 y_1$ и $z_2 C_2 y_2$, то есть расстояний a_1, a_2, b_1, b_2 (с учетом знака).

6) Выбор из таблиц сортамента необходимых значений моментов инерции $J_{z1}, J_{y1}, J_{z2}, J_{y2}$ с указанием ГОСТа каждой фигуры.

7) Расчет осевых J_z, J_y и центробежного J_{zy} моментов инерции проектируемого сечения в системе координат zCy (рисунок 1):

$$\left. \begin{aligned} J_z &= J_{z1} + a_1^2 F_1 + J_{z2} + a_2^2 F_2, \\ J_y &= J_{y1} + b_1^2 F_1 + J_{y2} + b_2^2 F_2; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$J_{zy} = J_{z1y1} + a_1 b_1 F_1 + J_{z2y2} + a_2 b_2 F_2, \quad (4)$$

8) Вычисление по формуле (1.11) с точностью до минут или до сотых долей градуса угла α_0 между z и z_{cl} . ($|\alpha_0| \leq 45^\circ$).

9) Определение осей «*max*» и «*min*» с изображением их на чертеже заданного сечения в масштабе 1:1 или 1:2 (z_{cl} и y_{cl} - главные оси).

10) Вычисление главных центральных моментов инерции J_{max} и J_{min} .

11) Проверка правильности расчета геометрических параметров α_0, J_{max} и J_{min} .

Указания.

1) Пунктирная линия на рисунке 1 служит для контроля точности расположения общего центра тяжести C фигуры (отрезок $C_1 C_2$ должен включать точку C).

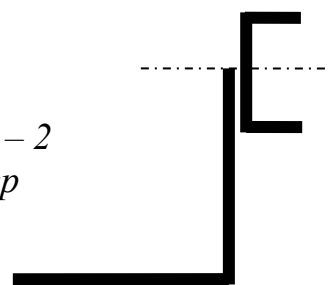
1

двутавр
уголок -1



2

уголок - 2
швеллер



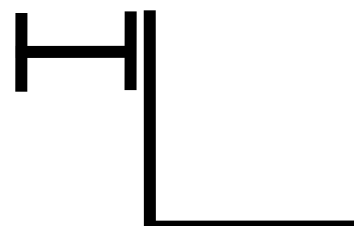
3

швеллер
уголок -1



4

уголок - 2
двутавр



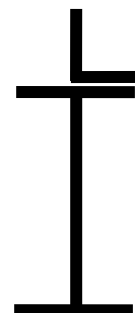
5

уголок - 2
швеллер



6

двутавр
уголок -1



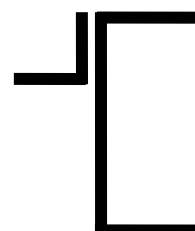
7

уголок - 2
уголок - 1



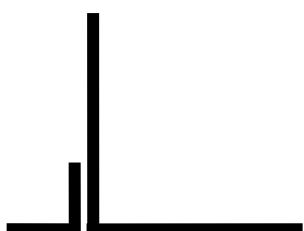
8

швеллер
уголок -1



9

уголок - 2
уголок - 1



0

уголок - 2
швеллер

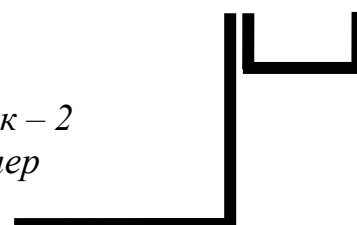


Рисунок 1

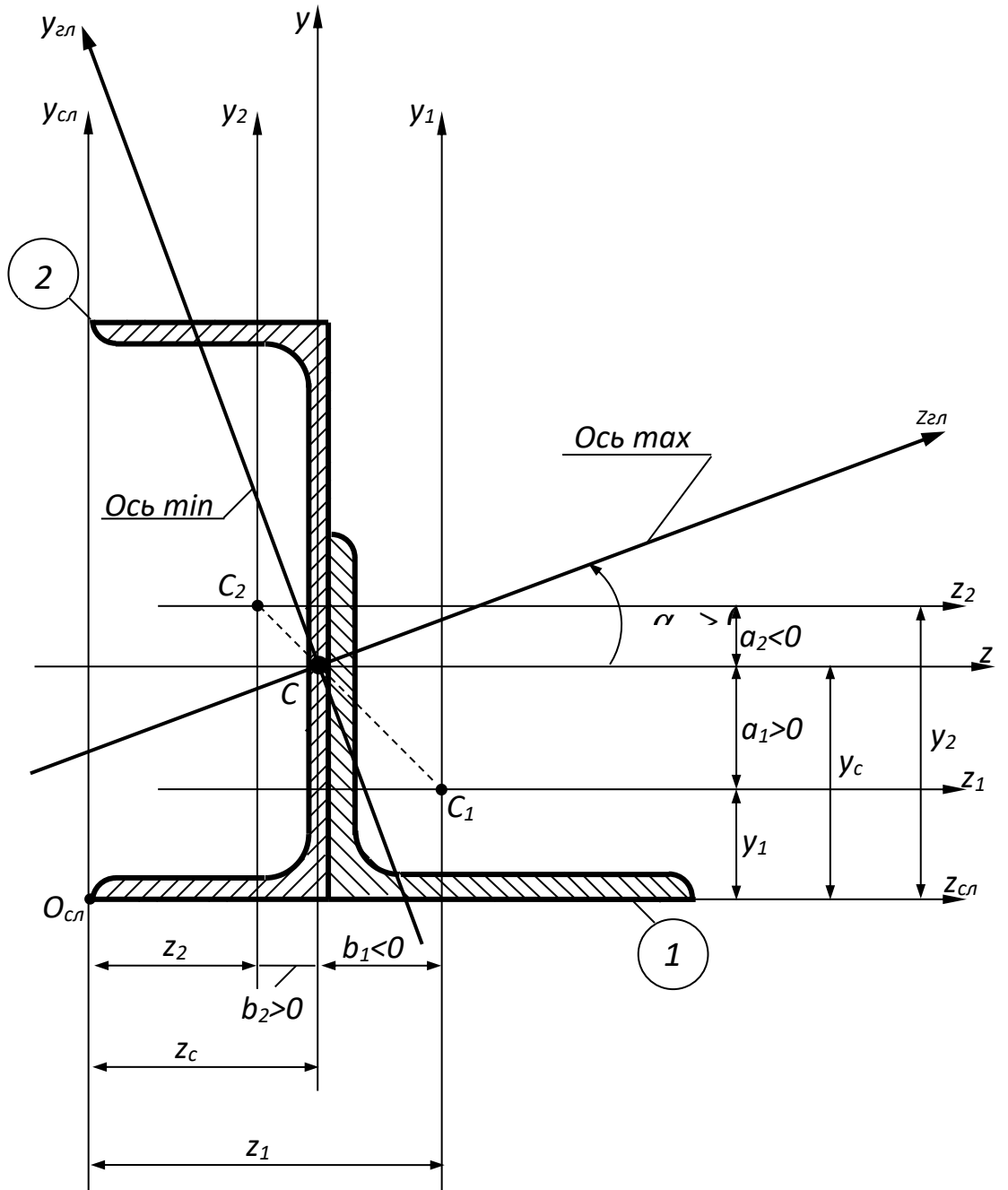


Рисунок 2

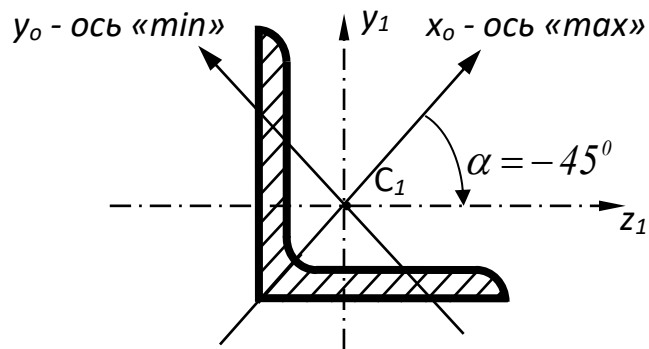


Рисунок 3

2) Для определения центробежного момента инерции $J_{z_1y_1}$ уголка относительно центральных осей z_1 и y_1 , параллельных полкам (рисунок 2), численное значение которого не приводится в таблицах ГОСТа, необходимо воспользоваться следующей формулой с буквенными обозначениями главных осей x_o и y_o , принятыми в сортаменте:

$$J_{z_1y_1} = \frac{J_{x_o} - J_{y_o}}{2} \sin 2\alpha, \quad (5)$$

где $J_{x_o} = J_{max}^{\angle}$, $J_{y_o} = J_{min}^{\angle}$ - главные центральные моменты инерции (из сортамента);

α - угол между осями x_o и z_1 с учетом знака (на рисунке 3 значение $\alpha = -45^\circ$).

3.5 Пример выполнения расчетно-графической работы № 1

Определить положение главных центральных осей и вычислить соответствующие моменты инерции для фигуры состоящей из прокатных профилей, показанной на рисунке 4.

Фигура состоит из 3-х прокатных профилей:

1. Швеллер № 24 (ГОСТ 8240-72);
2. Двутавр № 22 (ГОСТ 8239-72);
3. Равнобокий уголок № 5 (ГОСТ 8509-72).

1) Используя таблицы сортамента (ГОСТА) прокатных профилей (предлагаемые как справочный материал в учебниках и справочниках по сопротивлению материалов) выписываем значение площадей каждой фигуры F_1, F_2, F_3 .

2) Введем произвольные (случайные) оси координат $z_{сл}$ и $y_{сл}$ (рисунок 2) эти оси можно располагать произвольно, но для облегчения расчетов по данной задаче рекомендуется, чтобы фигура находилась в первой четверти, что дает возможность все необходимые значения использовать только с положительным знаком.

3) Определим координаты центров тяжести $c_1(z_1, y_1); c_2(z_2, y_2); c_3(z_3, y_3)$ каждого прокатного профиля в системе отсчета $z_{сл}O_{сл}y_{сл}$ и обозначаем их на чертеже, проводя параллельно осям $z_{сл}$ и $y_{сл}$.

4) Вычисляем статические моменты $S_{z_{сл}}$ и $S_{y_{сл}}$, а также координаты центра тяжести всего сечения z_c, y_c и проводим через точку c базовые центральные оси z, y (см. рисунок 4). Для упрощения расчетов все данные позиций 1, 3, 4 занесем в таблицу 1.

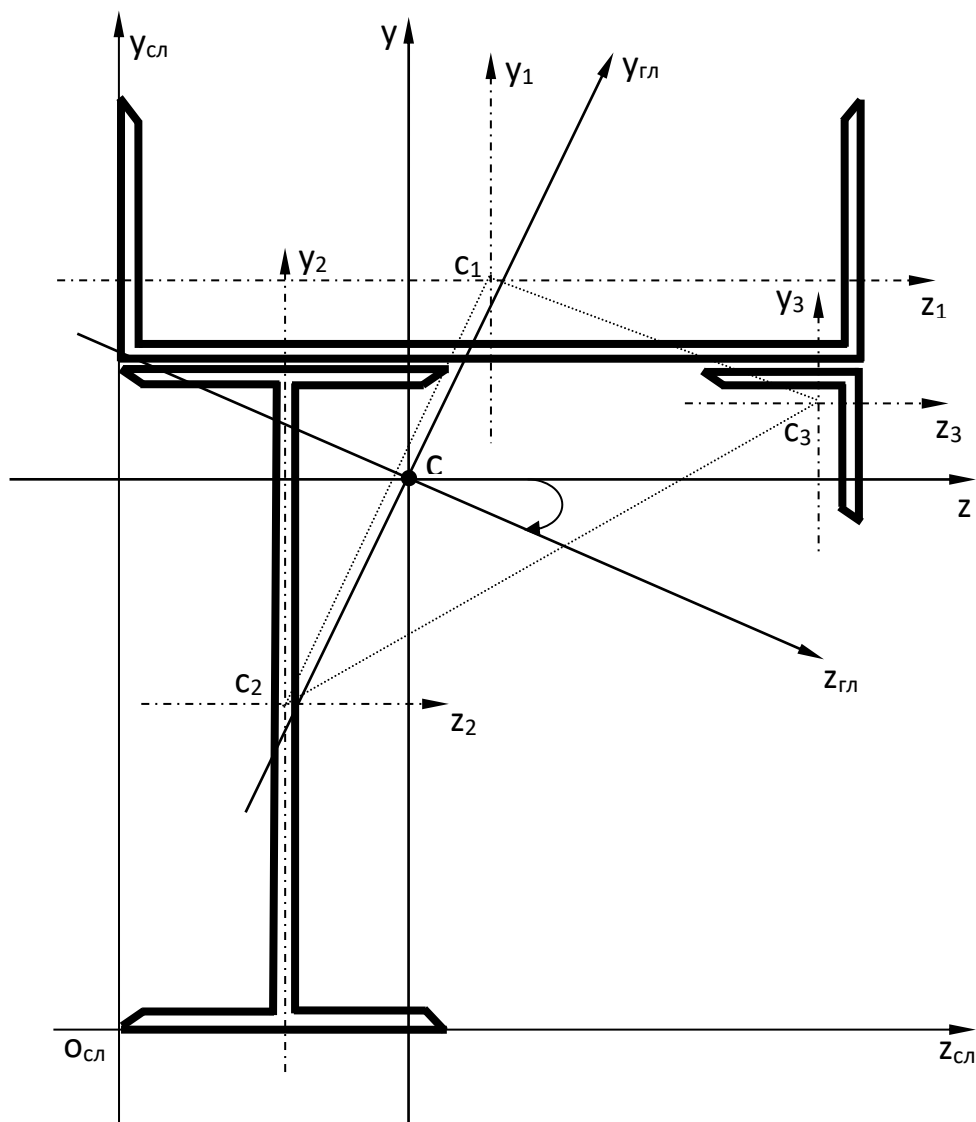


Рисунок 4

Таблица 2 – Геометрические параметры и статические моменты

N_{∂}	$z_{cni},$ см	$y_{cni},$ см	$F_i,$ см ²	$S_{yi} = z_{cni} \cdot F_i,$ см ³	$S_{zi} = y_{cni} \cdot F_i,$ см ³
1	12	24,42	30,6	367,2	747,252
2	5,5	11	30,6	168,3	336,6
3	22,58	20,58	4,8	108,384	98,784
Σ			66	643,884	1182,636

Суммируя соответствующие столбцы, находим общую площадь и статические моменты относительно осей $z_{сл}$ и $y_{сл}$, после чего определяем координаты центра тяжести по формулам:

$$z_c = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum z_{cni} F_i}{\sum F_i} = \frac{643,884}{66} = 9,756(\text{см}),$$

$$y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{\sum y_{cni} F_i}{\sum F_i} = \frac{1182,636}{66} = 17,919(\text{см}).$$

5) Определяем координаты центра «с» в собственных системах отсчета $z_1c_1y_1$; $z_2c_2y_2$; $z_3c_3y_3$, т.е. расстояния a_i и b_i с учетом знака, где:

$$a_i = z_{cni} - z_c;$$

$$b_i = y_{cni} - y_c.$$

6) Выберем из таблиц сортамента необходимые значения моментов инерции для каждого из профилей $J_{z1}, J_{z2}, J_{z3}, J_{y1}, J_{y2}, J_{y3}$. Данные позиций 5 и 6 занесем в таблицу 3

Таблица 3 – Моменты инерции

№	$a_i,$ см	$b_i,$ см	$F_i,$ см ²	$J_{zi},$ см ⁴	$J_{yi},$ см ⁴	$J_{z_iy_i},$ см ⁴	$a_i^2 F_i,$ см ⁴	$b_i^2 F_i,$ см ⁴	$a_i b_i F_i,$ см ⁴
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2,244	6,501	30,6	208	2900	0	154,0874	1293,248	446,400
2	-4,256	-6,919	30,6	2550	157	0	554,274	1464,9	901,0863
3	12,824	2,661	4,8	11,2	11,2	-6,585	789,384	33,988	163,798
Σ				2769,2	3068,2	-6,585	1497,745	2792,136	1511,284

Центробежный момент инерции $J_{z_3y_3}$ для уголка относительно осей z_3 и y_3 параллельных полкам можно определить, воспользовавшись следующей формулой

$$J_{z_3y_3} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha = \frac{17,8 - 4,63}{2} (-\sin 90^\circ) = -6,585(\text{см}^4),$$

где $J_x = J_{\max}^\angle = 17,8$; $J_y = J_{\min}^\angle = 4,63$ – главные центральные моменты инерции (из таблицы сортамента);

$\alpha = -45^\circ$ - угол между осями с учетом знака.

7) Найдем осевые и центробежный моменты инерции всего сечения относительно осей z и y . J_z представляет собой результат сложения сумм четвертого и восьмого столбцов, J_y - пятого и седьмого, J_{zy} - шестого и девятого столбцов.

$$\begin{aligned}
 J_z &= \sum (J_{z_i} + b_i^2 F_i) = 2769,2 + 2792,136 = 5561,336 (\text{см}^4), \\
 J_y &= \sum (J_{y_i}^i + a_i^2 F_i) = 3068,2 + 1497,745 = 4565,945 (\text{см}^4), \\
 J_{zy} &= \sum (J_{zy_i} + a_i b_i F_i) = -6,585 + 1511,284 = 1504,699 (\text{см}^4).
 \end{aligned}$$

Так как $J_z > J_y$, то ось z_{gl} является осью, относительно которой момент инерции будет максимальным.

8) Определим градус угла α_o относительно осей z и z_{gl}

$$\operatorname{tg} 2\alpha_o = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z} = \frac{2 \cdot 1504,699}{4565,945 - 5561,366} = -3,0233 \Rightarrow \alpha_o \approx -35,8489.$$

Поскольку угол α_o отрицательный, главная центральная ось z_{gl} откладывается относительно центральной оси z по часовой стрелке.

9) Изобразим на чертеже оси «*min*» и «*max*» (главные оси z_{gl} и y_{gl}) (см. рисунок 3.7).

10) Вычислим главные центральные моменты инерции используя формулу (1.12)

$$\begin{aligned}
 J_{\min}^{max} &= \frac{5561,336 + 4565,945}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5561,336 - 4565,945}{2}\right)^2 + 1504,699^2} = \\
 &= 5063,6405 \pm 1584,8722
 \end{aligned}$$

Таким образом, главные центральные моменты инерции равны

$$J_{max} = 6648,5127 \text{см}^4; J_{min} = 3478,7683 \text{см}^4.$$

11) Проверим правильность определения геометрических параметров J_{max} , J_{min} и α_o , должны выполняться два условия:

$$J_z + J_y = J_{max} + J_{min},$$

$$10127,281 = 10127,281;$$

$$J_{Zz_2Yz_1} = \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha_o + J_{zy} \cdot \cos 2\alpha_o = 0.$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{5561,336 - 4565,945}{2} \sin(-2 \cdot 35,8489) + 1504,699 \cdot \cos(-2 \cdot 35,8489) = \\
 &= -472,5187868 + 472,5189884 = 0,000202 \approx 0.
 \end{aligned}$$

Оба условия выполняются, таким образом, необходимые геометрические параметры найдены правильно.